La ecuación de Poissón. Solución formal.

Se recuerda el teorema de Green, en la forma,

$$\int_V \left(\psi\,\nabla^2\varphi-\varphi\,\nabla^2\psi\right)dV=\int_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)da \qquad 100$$

Se construye un volumen V encerrado por dos superficies S_1 y S_2 como se muestra en la figura 7. Las normales a las superficies se muestran. Desde un origen arbitrario, los vectores ***r*** y ***r'*** se dibujan. Además, el vector ***R = r - r'*** se muestra. En la ecuación (100) se fija ψ igual a $1/|\boldsymbol{R}|$ y se deja que φ sea tal que $\nabla^2\varphi=-\rho/\epsilon_0$. Luego, la ecuación (100) se vuelve

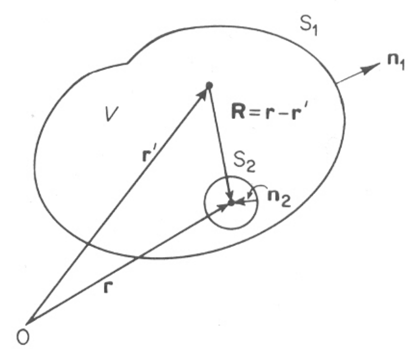

Figura 7.
Figura para la solución de la ecuación de Poissón.

$$\int_V\left[\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\nabla^2\varphi-\varphi\left(\frac{1}{\boldsymbol{R}}\right)\right]dV=\int_{S_1,S_2}\left[\frac{1}{\boldsymbol{R}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\varphi\frac{1}{|\boldsymbol{R}|^2}\right]da' \qquad 101$$

Dentro del volumen bajo consideración, $\nabla^2(1/|\boldsymbol{R}|)\equiv 0$ ya que $1/|\boldsymbol{R}|$ es una solución de la ecuación de Laplace. Además, la integral sobre el volumen se reduce a

$$\int_V\left[\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\right)\right]dV=\frac{-1}{\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r})\,dV'}{R} \qquad 102$$

donde $R=|\boldsymbol{R}|$. Considere ahora la integral de superficie de la mano derecha de la ecuación (101). Mientras la superficie S_1 retrocede al infinito, tanto $(1/R)(\partial\varphi/\partial n)$ como φ/R^2 serán del orden r'^{-3} si φ es del orden de R^{-1}. Ahora se plantea tal restricción sobre φ, que equivale a decir que el infinito es el nivel de referencia de potencial cero. Puesto que *da* es del orden r'^2, el integrando sobre S_1 es del orden r'^{-1} mientras $r'\to\infty$. Por consiguiente,

$$\lim_{S_1\to\infty}\int_{S_1}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\varphi}{R^2}\right]da\equiv 0 \qquad 103$$

La integral sobre S_2 queda por evaluarse. Como se observa en la figura 7, una pequeña esfera ha sido suprimida del volumen V sobre el punto $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$. El radio de la esfera se indica por ρ. Entonces se quiere evaluar la integral

$$\int_{S_2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\varphi}{R^2}\right]da=\int_{S_2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]da$$

en el límite cuando $\rho\rightarrow 0$. Mientras $\rho\rightarrow 0$, $1/R\rightarrow 1/\rho$ mientras $\partial\varphi/\partial n$ toma su valor en el punto $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$. Pero $da = 0(\rho^2)$. De este modo,

$$\int_{S_2}\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}da=0(\rho)\rightarrow 0 \quad \text{mientras} \quad \rho\rightarrow 0$$

La normal a la superficie S_2 se apunta fuera de S_2 hacia dentro del volumen de radio ρ. Tomando en cuenta que un cambio de signo ocurre,

$$\lim_{\rho\rightarrow 0}\int_{S_2}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)da=-4\pi\varphi(\boldsymbol{r}) \qquad 104$$

Se ha utilizado el hecho de que $\lim_{\rho\rightarrow 0}\partial/\partial n(1/R)=-1/\rho^2$ y que $da=\rho^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$. Los términos en ρ^2 se cancelan mientras que la integral $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi=4\pi$. Al insertar el valor de la integral de superficie, a saber la ecuación (104) dentro de la ecuación (102), se obtiene la ecuación (99) una vez más; a saber,

$$\varphi_e(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{R} \qquad 99$$

Hay un punto que merece mencionar. Si la superficie S_1 no se permite retroceder al infinito, existe una contribución superficial a $\varphi(\boldsymbol{r})$. Si S_1 es una superficie finita, la ecuación (99) se modifica para leer

$$\varphi_e(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{R}+\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n}+\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{R^2}\right]da \qquad 105$$

Para que la ecuación (105) pueda resolverse, los valores de $\varphi(\boldsymbol{r}')$ y $\partial\varphi(\boldsymbol{r}')/\partial n$ deben ser especificados sobre la superficie S_1.

La ecuación de Poissón – Ejemplo

Supóngase que $\rho(\boldsymbol{r}')$ es una función sólo de la coordenada esférica variable r; o sea, $\rho(\boldsymbol{r}')$ es una distribución de carga de simetría esférica. Considere la figura 8 en la cual existe una densidad de carga $\rho(\boldsymbol{r}')$ en la región $\mathbf{0}\leq \boldsymbol{r}'\leq \boldsymbol{r}_{\mathbf{0}}$. La longitud R está dada por

$$R=(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{1/2}$$

de manera que

$$\varphi_e(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{r_0}\rho(r')r'^2 dr'\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{1/2}} \qquad 106$$

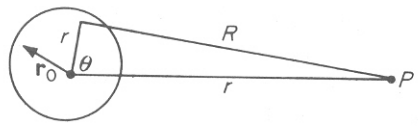

Figura 8.
Problema con ρ(*r'*) una función sólo de *r*.

La integración sobre ϕ produce un factor de 2π. Al fijar $\cos\theta=x$ $(\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-dx)$,

$$\varphi_e(r)=\frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^{r_0}\rho(r')r'^2 dr'\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(r^2+r'^2-2rr'x)^{1/2}} \qquad 107$$

Una integración produce

$$\varphi_e(r)=-\frac{1}{2\epsilon_0}\int_0^{r_0}r'\rho(r')[(r-r')-(r+r')]dr' \qquad 108$$

Finalmente

$$\varphi_e(r)=\frac{1}{\epsilon_o r}\int_0^{r_0}r'^2\rho(r')dr' \qquad 109$$